**Практическая работа № 8**

**«Симплекс-метод .**Решение задачи линейного программирования в Matlab»

**Цель работы:** научиться решать ЗЛП симплекс методом.

**Образовательные результаты, заявленные во ФГОС третьего поколения:**

Студент должен

уметь:

- подбирать аналитические методы исследования математических моделей;

- использовать численные методы исследования математических моделей;

- работать с пакетами прикладных программ аналитического и численного исследования математических моделей;

знать:

- методику проведения вычислительного эксперимента с использованием электронной вычислительной техники;

- методы исследования математических моделей разных типов.

**Краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практической работы**

**1. Симплекс-метод**

*Симплекс-метод* или *метод улучшенного плана* – один из универсальных методов решения ЗЛП. Это упорядоченный процесс перехода от одного опорного плана к другому, при котором (при решении задач на максимум) соответствующие значения целевой функции возрастают (или, по крайней мере, не убывают).

Пусть ЗЛП имеет канонический вид:

, (1)

причем столбец свободных членов удовлетворяет условию *B≥0*. В системе ограничений *m* уравнений и *n* неизвестных, т.е. матрица *A* имеет размер *m×n*,вектор-столбец *B* - *m×1*, вектор-строка коэффициентов целевой функции *C* - *1×n*. Алгоритм решения задачи (3.1) симплекс-методом будем сопровождать решением конкретного примера, а именно задачи

 (2)

1. *Получение начального опорного плана*. Один из вариантов – преобразование расширенной матрицы системы ограничений к приведенному виду (выделение единичной квадратной подматрицы), выделение *базисных* и *свободных* переменных.

.

Здесь *x3, x4* – базисные переменные, *x1, x2*– свободные переменные. *При преобразованиях необходимо следить за тем, чтобы столбец свободных членов оставался неотрицательным.* Начальный опорный план получается, если присвоить свободным переменным значения, равные нулю; при этом базисные переменные принимают значения, равные числам в соответствующей строке столбца свободных членов: Xоп1=(0;0;3;4).

2) По преобразованной системе ограничений составляют *симплекс-таблицу*. *В верхней строке* (заголовки столбцов) располагаются свободные переменные, в *крайнем левом столбце* – базисные переменные; *крайний правый столбец* – это столбец свободных членов, а *самая нижняя строка* является строкой целевой функции (об определении чисел Δ1, Δ2, Δf в этой строке речь пойдет ниже). *Остальное содержимое таблицы* - столбцы преобразованной матрицы, отвечающие соответствующим столбцам свободных переменных (см. таблицу .1).

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | *x1* | *x2* | *B* |  |  | *x1* | *x2* | *B* |
| *x3* | 1 | 1 | 3 |  | *x3* | 1 | 1 | 3 |
| *x4* | 2 | 1 | 4 |  | *x4* | 2 | 1 | 4 |
| *f* | Δ1 | Δ2 | Δf |  | *f* | -6 | 2 | 1 |
| **Таблица 1** | | | |  | **Таблица 2** | | | |

Для того чтобы найти значение Δi (в рассматриваемом примере *i=1,2*), воспользуемся ***правилом***: вектор из коэффициентов при базисных переменных в целевой функции скалярно умножить на *i*-й столбец симплекс-таблицы и вычесть из найденного числа коэффициент целевой функции при соответствующем свободном переменном. Для Δf скалярно перемножаются вектор коэффициентов при базисных переменных целевой функции и столбец свободных членов:

**;**

**;**

**.**

Итак,таблица 2 представляет собой окончательный вид первой симплекс-таблицы.

*Замечание.* Следует обратить внимание на то, что Δf – это значение целевой функции при найденном начальном опорном решении: *Δf=f(0,0,3,4)=1.* Числа же Δ1, Δ2 – оценки, которые будут учитываться при проверке этого решения на оптимальность.

3) Если *все оценки Δi неотрицательны,* то построенное начальное опорное решение является оптимальным, причем в случае положительности всех оценок решение единственно.

Если среди этих оценок есть отрицательная, но среди чисел в ее столбце нет положительных, то исходная задача *не имеет решения* в силу неограниченности целевой функции.

Если в каждом столбце с отрицательной оценкой есть хотя бы один положительный элемент, то необходимо осуществить *переход к новому опорному плану*, который затем снова проверяется на оптимальность.

4) *Переход к новому опорному плану* проводится по следующей схеме.

- Выбирается *ведущий столбец* (столбец с отрицательной оценкой). Если отрицательных оценок несколько, то выбирается столбец с отрицательной оценкой, наибольшей по модулю. В рассматриваемом примере ведущим будет первый столбец (Δ1=-6)

- Выбирается *ведущая строка*. Для этого определяется наименьшее из симплексных отношений (т.е. отношений свободных членов к соответствующим положительным элементам ведущего столбца). В примере оба числа в первом столбце положительны, поэтому: , ведущей будет вторая строка.

- На пересечении ведущих строки и столбца определяется *ведущий (разрешающий) элемент* (в примере это 2, соответствующая ячейка таблицы 2 заштрихована).

- В заголовках меняются местами переменные, соответствующие ведущим строке и столбцу (в примере меняются местами *x1* и *x4)*.

- Ведущий элемент заменяется значением, обратным этому элементу (в примере 1/2).

- Все остальные элементы ведущей строки делятся на ведущий элемент, а все остальные элементы ведущего столбца делятся на ведущий элемент, взятый со знаком «-» (см. таблицу 3.3, в которую внесены описанные выше изменения, а не найденные пока числа заменены греческими буквами).

- Оставшиеся элементы находят с помощью «*правила многоугольника*»  (здесь *Х* – вычисляемое значение,  - соответствующий элемент «старой» таблицы, *B –* ведущий элемент, A и C – оставшиеся вершины четырехугольника с диагональю ). Для разбираемого примера имеем:

; ; ; .

Итак, получена *новая* симплекс-таблица (таблица 4), которая определяет *новое опорное решение* (свободные переменные *x2, x4;* их значения будут равны нулю; базисные переменные *x1, x3;* их значения - соответствующие числа из столбца свободных членов: *x1=2, x3=1).* Значение функции на этом опорном решении – в правом нижнем углу, т.е. *Xоп2=(2;0;1;0), f(2,0,1,0)=13.*

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | *x4* | *x2* | *B* |  |  | *x4* | *x2* | *B* |
| *x3* | -1/2 | α | β |  | *x3* | -1/2 | 1/2 | 1 |
| *x1* | 1/2 | 1/2 | 2 |  | *x1* | 1/2 | 1/2 | 2 |
| *f* | 3 | γ | δ |  | *f* | 3 | 5 | 13 |
| **Таблица 3** | | | |  | **Таблица 4** | | | |

5) Построенное новое опорное решение требуется снова проверить на оптимальность и, если необходимо, повторить операцию перехода. В рассматриваемой задаче, однако, все оценки стали положительными, и, следовательно, *Xоп2=(2;0;1;0)=Xоптим***,** *fmax=f(2,0,1,0)=13.*

*Замечание*. Бывают ситуации (например, когда система ограничений несовместна), когда начальное опорное решение построить невозможно; в этом случае исходная задача *не имеет решения*.

**2. Метод искусственного базиса**

Рассматриваемый метод предусматривает другой алгоритм нахождения начального опорного решения. Для задачи (1), которую называют *исходной*, строится *расширенная* задача по следующим правилам:

- в каждое из уравнений системы ограничений, в котором отсутствует базисная переменная, вводят новую неотрицательную переменную (такие переменные называются *искусственными*);

- в целевую функцию эти же переменные вводятся с одинаковым коэффициентом «-М», причем М – сколь угодно большое положительное число.

В частности, для рассмотренной в качестве примера задачи (2) расширенная задача принимает вид

(3)

Таким образом, сразу получается начальное опорное решение, в которое все искусственные переменные входят как базисные. Далее строится обычная симплекс-таблица, у которой последняя строка (строка оценок), разбивается на две строчки, принцип заполнения которых будет объяснен ниже в примере. После этого проводятся знакомые по симплекс-методу необходимые преобразования (с целью избавиться от всех отрицательных оценок). На завершающем этапе требуется учесть следующее:

*- если все искусственные переменные стали свободными и были исключены из таблицы, то значения переменных xi образуют оптимальное решение исходной задачи;*

*- если в оптимальном решении расширенной задачи хотя бы одна искусственная переменная осталась базисной, то исходная задача не имеет решения в силу несовместности системы ограничений;*

*- если расширенная задача не имеет решения в силу неограниченности целевой функции, то исходная задача также не имеет решения по той же причине.*

Реализацию метода искусственного базиса можно проследить на примере задач (2)-(3). Первая из симплекс-таблиц – таблица 5.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | | *x1* | *x2* | *x3* | *x4* | *B* |
| *w1* | | 3 | 2 | 1 | 1 | 7 |
| *w2* | | 5 | 3 | 1 | 2 | 11 |
| *f1* | *f* | -5 | 1 | -3 | 2 | 0 |
| *M* | -8 | -5 | -2 | -3 | -18 |
| **Таблица 5** | | | | | | |

Оценки были вычислены следующим образом.

Первый столбец ****;

второй****;

третий столбец ****;

четвертый ****;

столбец свободных членов **.**

Как легко увидеть, в строчку оценок «*f*» вошли свободные члены полученных выражений, в строчку оценок «*M*» - коэффициенты при *M*. Поскольку *М* – достаточно большое число, то именно последняя строка определяет знак оценки (в примере все оценки являются отрицательными, поэтому соответствующее таблице 5 решение задачи (3) – опорное, но не оптимальное).

Дальнейшее решение идет по схеме обычного симплекс-метода. Ведущим столбцом будет первый (наибольшее по модулю значение отрицательной оценки), ведущей строкой - вторая, так как , поэтому ведущий элемент (выделен) равен 5. Проведя преобразования, переходим к новой симплекс-таблице (таблица 6)

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | | *w2* | *x2* | *x3* | *x4* | *B* | **Таблица 6** |
| *w1* | | -3/5 | 1/5 | 2/5 | -1/5 | 2/5 |
| *x1* | | 1/5 | 3/5 | 1/5 | 2/5 | 11/5 |
| *f1* | *f* | 1 | 4 | -2 | 4 | 11 |
| *M* | 8/5 | -1/5 | -2/5 | 1/5 | -2/5 |

Поскольку искусственная переменная стала свободной, соответствующий столбец можно исключить для упрощения вычислений и получить окончательный вид новой симплекс-таблицы (таблица 7; в последующем «промежуточную» таблицу строить не будем):

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | | *x2* | *x3* | *x4* | *B* | **Таблица 7** |
| *w1* | | 1/5 | 2/5 | -1/5 | 2/5 |
| *x1* | | 3/5 | 1/5 | 2/5 | 11/5 |
| *f1* | *f* | 4 | -2 | 4 | 11 |
| *M* | -1/5 | -2/5 | 1/5 | -2/5 |

В таблице 7 отрицательные оценки находятся в столбцах с переменными *x2* и *x3*; наибольшим по модуля является число -2/5, поэтому столбец с этой оценкой, т.е. столбец для *x3*, становится ведущим*.* Ведущей строкой будет первая, поскольку. Осуществляем переход к новой симплекс-таблице, причем столбец, в который переходит переменная *w1,* сразу удаляем (проверьте вычисления!) и получаем таблицу 8

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | | *x2* | *x4* | *B* | **Таблица 8** |
| *x3* | | 1/2 | -1/2 | 1 |
| *x1* | | 1/2 | 1/2 | 2 |
| *f1* | *f* | 5 | 3 | 13 |
| *M* | 0 | 0 | 0 |

Здесь можно было бы удалить и последнюю строку, так как в ней все значения равны нулю. Все значения оценок положительны, искусственные переменные исключены, поэтому мы получили (единственное!) оптимальное решение задачи (3.2): *Xоптим=(2;0;1;0), fmax=f(2,0,1,0)=13.*

*Замечание.* Окончательная таблица в данном случае совпала с таблицей 4 – последней таблицей для решения задачи (2) обычным симплекс-методом.

3 **При решении задач линейного программирования в Matlab** используется функция linprog. В простейшем случае функция linprog реализует вычисление min fTx, такое что: A\*x≤b, где *f*, *x*, *b* – векторы, *A* – матрица. В этом случае синтаксис функции следующий:

linprog(f,A,b).

Пример. Решить задачу определения оптимального ассортимента продукции с применением функции linprog.

Предприятие изготавливает два вида продукции — П1 и П2, которая поступает в оптовую продажу. Для производства продукции используются два вида сырья — А и В. Максимально возможные запасы сырья в сутки составляют 9 и 13 единиц соответственно. Для изготовления продукции П1 используются 2 единицы сырья А и 3 единицы сырья В; для изготовления продукции П2 используются 3 единицы сырья А и 2 единицы сырья В.

Опыт работы показал, что суточный спрос на продукцию П1 никогда не превышает спроса на продукцию П2 более чем на 1 ед. Кроме того, известно, что спрос на продукцию П2 никогда не превышает 2 ед. в сутки. Оптовые цены единицы продукции равны: 3 д. е. — для П1 и 4 д. е. — для П2. Какое количество продукции каждого вида должно производить предприятие, чтобы доход от реализации продукции был максимальным?

Формально условие задачи можно записать в виде:

2x1+3x2≤9

3x1+2x2≤13

x1-x2≤1

x2≤2

Целевая функция имеет вид: f=3x1+4x2→max

Решение задачи выполняется согласно следующей методике в среде Matlab.

1. Запустите Matlab.

2. Определите решение задачи линейного программирования, используя команду linprog. В командной строке введите команду с=[3;4]; и нажмите Enter. Аналогично введите следующую последовательность команд:

A=[2 3;3 2;1 -1; 0 1];

b=[9 13 1 2];

X=linprog(-c, A , b).

Назначение каждой команды приведено в таблице.

|  |  |
| --- | --- |
| Команда | Назначение |
| с=[3;4]; | задание параметров целевой функции |
| A=[2 3;3 2;1 -1; 0 1]; | задание параметров ограничений |
| b=[9 13 1 2]; | заданий свободных коэффициентов ограничений |
| X=linprog(-c, A , b). | вычисление оптимальных значений |

Внимание!!! По условию задачи требуется найти максимум целевой функции, поэтому находим значения –c (X=linprog(-C, A , b).). Если по условию задачи требуется найти минимум целевой функции, то команда будет иметь формат X=linprog(C, A , b).

3. После выполнения указанных команд система выдаст на экран значения

X = 2.4000

1.4000

Эти значения являются решением задачи.

4. Вычислите значение целевой функции для найденного решения. В командной строке введите команду 3\*2.4+4\*1.4, нажмите Enter. Система вычислит значение целевой функции. В данном случае 12,8.

Таким образом, максимальная прибыль будет получена, если объем производства продукции П1 составит 2,4 единицы, а продукции П2 — 1,4 единицы. Доход, получаемый в этом случае, равен 12,8 денежных единиц.

**Задания для практического занятия:**

**Задание 1. Решить ЗЛП с помощью симплекс-метода с естественным базисом.**

|  |  |
| --- | --- |
| **Вариант 1.** | **Вариант 2.** |
| **Вариант 3.** | **Вариант 4.** |
| **Вариант 5.** | **Вариант 6.** |
| **Вариант 7.** | **Вариант 8.** |
| **Вариант 9.** | **Вариант 10.** |
| **Вариант 11.** | **Вариант 12.** |
| **Вариант 13.** | **Вариант 14.** |
| **Вариант 15.** | **Вариант 16.** |
| **Вариант 17.** | **Вариант 18.** |

|  |  |
| --- | --- |
| **Вариант 19.** | **Вариант 20.** |

**Задание 2. Решить ЗЛП с помощью симплекс-метода с искусственным базисом.**

|  |  |
| --- | --- |
| **Вариант 1.** | **Вариант 2.** |
| **Вариант 3.** | **Вариант 4.** |
| **Вариант 5.** | **Вариант 6.** |
| **Вариант 7.** | **Вариант 8.** |
| **Вариант 9.** | **Вариант 10.** |
| **Вариант 11.** | **Вариант 12.** |
| **Вариант 13.** | **Вариант 14.** |
| **Вариант 15.** | **Вариант 16.** |

**Задания 3.**

1. Решить задачу определения оптимального ассортимента продукции. Вычислить, какое количество продукции каждого вида должно производить предприятие, чтобы доход от реализации продукции был максимальным. Вычислить значение максимального дохода.

2. Решить задачу согласно индивидуальному заданию. Номер варианта соответствует Вашему номеру в журнале.

Варианты 1-15. Компания изготавливает два вида продукции – П1 и П2. Для производства продукции используются два вида сырья – M1 и M2. Оптовые цены единицы продукции равны: *a* д.е. для П1 и *b* д.е. для П2. Расход сырья на единицу продукции вида П1 и вида П2 дан в таблице.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Сырье | Расход сырья на 1 ед. продукции | | Максимальный запас сырья, ед. |
| П1 | П2 |
| M1  M2 | *c*  *g* | *d*  *h* | *e*  *i* |

Установлены ограничения на спрос продукции: ежедневный объем производства продукции П2 не должен превышать ежедневный объем производства продукции П1 более чем на *j* тонн; максимальный ежедневный объем производства П2 не должен превышать *k* т.

Требуется определить, какое количество продукции каждого вида должно производить предприятие, чтобы доход от реализации продукции был максимальным.

Формально условие задачи можно записать в виде:

c\*x1+d\*x2≤e

g\*x1+h\*x2≤i

x2-x1≤j

x2≤k

Целевая функция имеет вид: f=a\*x1+b\*x2→max

Значения коэффициентов приведены в таблице:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Вариант | a | b | c | d | e | g | h | i | j | k |
| 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 12 | 4 | 6 | 25 | 4 | 2 |
| 2 | 4 | 6 | 3 | 1 | 18 | 8 | 4 | 32 | 2 | 4 |
| 3 | 5 | 3 | 2 | 3 | 16 | 6 | 4 | 28 | 4 | 6 |
| 4 | 1 | 4 | 3 | 6 | 20 | 4 | 2 | 24 | 3 | 2 |
| 5 | 3 | 1 | 5 | 3 | 27 | 2 | 5 | 34 | 4 | 3 |
| 6 | 4 | 2 | 3 | 5 | 28 | 3 | 6 | 28 | 2 | 1 |
| 7 | 3 | 2 | 2 | 3 | 24 | 2 | 7 | 26 | 2 | 2 |
| 8 | 5 | 4 | 3 | 2 | 22 | 3 | 4 | 30 | 3 | 2 |
| 9 | 2 | 4 | 3 | 5 | 20 | 4 | 3 | 26 | 1 | 2 |
| 10 | 3 | 5 | 3 | 3 | 24 | 4 | 6 | 28 | 2 | 1 |
| 11 | 4 | 5 | 3 | 6 | 22 | 3 | 5 | 34 | 2 | 1 |
| 12 | 5 | 4 | 6 | 3 | 26 | 4 | 6 | 26 | 2 | 2 |
| 13 | 4 | 5 | 3 | 2 | 28 | 4 | 5 | 24 | 3 | 1 |
| 14 | 5 | 3 | 5 | 4 | 27 | 3 | 6 | 22 | 2 | 2 |
| 15 | 5 | 6 | 4 | 6 | 25 | 4 | 7 | 30 | 3 | 2 |

**Варианты 16-30**. Имеется два вида корма I и II, содержащие питательные вещества S1, S2 и S3. Содержание числа единиц питательных веществ в 1 кг каждого вида корма, стоимость 1 кг каждого вида корма и необходимый минимум питательных веществ приведены в таблице:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Питательное вещество (витамин) | Число единиц питательных веществ в 1 кг корма | | Необходимый минимум питательных веществ |
| I | II |
| S1 | a | b | c |
| S2 | d | e | g |
| S3 | h | i | j |
| Стоимость 1 кг корма | k | l |  |

Необходимо составить дневной рацион, имеющий минимальную стоимость, в котором содержание каждого вида питательных веществ было бы не менее установленного предела.

Формально условие задачи можно записать в виде:

a\*x1+b\*x2≤c

d\*x1+e\*x2≤g

h\*x1+i\*x2≤j

Целевая функция имеет вид: f=k\*x1+l\*x2→min

**Контрольные вопросы**

1. Каково назначение функции linprog?

2. Каковы параметры функции linprog?

3. Как задаются ограничения в задачах линейного программирования?